17 Компактные метрические пространства, их полнота, свойство ограниченности и вполне ограниченности

M — **компактно**, if из $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M$, можно выбрать сход-ся п/посл-ть $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in M$

Лемма If M — компакт., то M — полно

▲ $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фунд-ая; $\exists$ п/посл-ть $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $x_{n_k} \to x \in M \Rightarrow x_n \to x \in M$ ■

M — **предкомпактно**, if из $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать фунд. п/посл-ть

If M предкомпактно и полно, то оно компактно

Метр. пр-во M **огр.**, if $\sup\limits_{x,y\in M} d(x,y) < \infty$

Лемма If M — предкомпактно, то оно огр.

▲ От противного: $\sup\limits_{x,y\in M} d(x,y) = +\infty \Rightarrow x_n, y_n \in M$, $d(x_n, y_n) \to +\infty$, $\exists x_{n_k}$ — фундам., y_{n_k} — тоже $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n_k\to\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \infty \Rightarrow$ (!?) ■

M — **вполне огр.**, if $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_1, \dots, x_n \in M$, и $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$ ($\exists$ конеч. ε-сеть)

Утв Из вполне огр-ти $\Rightarrow$ огр-ть

▲ $d(x,y) \le d(x,x_m) + d(x_m,x_k) + d(x_k,y) < 2\varepsilon + d(x_m,x_k)$ ■